Геометрия и Гравитация (ИТМФ МГУ)

20.08.2025

1 Задачи на семинары

1. Показать что форма объема $dVol$ инвариантна относительно $x^m \to x'^m = x'^m(x)$

$$dVol = \sqrt{g}\,\epsilon_{m_1\dots m_D}\,dx^{m_1}\wedge\dots\wedge dx^{m_D} \tag{1}$$

2. Получить выражение для производной Ли ранга (p,q) в компонентах из общего выражения

$$L_\xi T^{\mu_1\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_q} = \left[\frac{d}{dt}(F_t T)^{\mu_1\dots\mu_p}_{\nu_1\dots\nu_q} V_j\right]_{t=0} \tag{2}$$

3. Определим $[x,y]^m = L_X Y^m - L_Y X^m$, где X^m, Y^m – векторные поля. Проверить, что так определенная скобка является скобкой Ли.

4. Найти вектора Киллинга $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{S}^3$. Получить их алгебру в обоих случаях.

5. Пусть $X_i = X^m_i\partial_m$ — векторное поле, $n = 1, ..., d_n \dim M$. ω^i дуальный базис 1-форм: $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$. Доказать, что $d\omega^i = -\frac{1}{2}f_{jk}{}^i\omega^j\wedge\omega^k$, если

$$[X_i, X_j] = f_{ij}{}^k X_k. \tag{3}$$

6. Получить преобразования символов Кристоффеля $\Gamma_{mn}{}^k$.

7. Получить метрику на сфере $\mathbb{S}^2$ вложением в $\mathbb{R}^3$ и нелинейной реализацией $\mathbb{S}^2 = SU(2)/U(1)$.

8. Показать, что меридианы на $\mathbb{S}^2$ являются геодезическими.

9. Построить параллельный перенос вектора на $\mathbb{S}^2$ вдоль малой окружности на некоторой широте θ. Найти угол поворота вектора.

10. Показать, что для связности Леви-Чивиты для любого вектора X^n выполнено $L^\partial_X = L^\nabla_X$. Показать, что условие $L_X g_{mn} = 0$ эквивалентно $\nabla_{(m}X_{n)} = 0$.

11. Показать, что внутренняя ковариантная производная, определенная как

$$\overline{\nabla}_m A_n = e^\mu_m e^\nu_n \nabla_\mu A_\nu, \tag{4}$$

где $A_m = A_\mu e^\mu_m$ — касательный вектор, согласована с индуцированной метрикой.

12. Построить атлас из двух карт на $\mathbb{S}^2$.

13. Построить атлас для $Mat^1_{2\times 2}\mathbb{R}$.

14. Показать, что эквивалентность кривых в данной точке не зависит от выбора карты, а закон преобразования компонент
$$\xi'^i_{p_0} = A^i{}_j \xi^j_{p_0}, \tag{5}$$
где $A^i{}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$.

15. Показать, что при переходе в другую карту с координатами x'^i компоненты тензора преобразуются правильно.

16. Пусть $\mathbb{I} = \{\alpha \in \mathbb{R}^1, -1 \le \alpha \le 1\}$, $\mathbb{Z}_2$ действует $t(\alpha) = -\alpha$. Показать, что $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{I}$ как тотальное пространство главного расслоения $(\mathbb{S}^1, \pi, \mathbb{R}P^1)$ является листом Мёбиуса.

17. Построить функции склейки для $\mathbb{R}^1$ расслоений над $\mathbb{S}^1$ (цилиндр и лист Мёбиуса).

18. Построить функции склейки для монополя Дирака (U(1) расслоение над $\mathbb{S}^2$).

19. Пусть X, Y – векторные поля на M и $\omega \in \Omega^r(M)$. Докажите, что
$$\iota_{[X,Y]}\omega = X(\iota_Y\omega) - Y(\iota_X\omega). \tag{6}$$
Также покажите, что ι_X является антидифференцированием,
$$\iota_X(\omega \wedge \eta) = \iota_X\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \iota_X\eta \tag{7}$$
и нильпотентным оператором,
$$\iota_X^2 = 0. \tag{8}$$
Используйте нильпотентность
$$L_X\iota_X\omega = \iota_X L_X\omega. \tag{9}$$